

MATEMATIKA

Emelt szint

9-12. évfolyam

évfolyam	9.	10.	11.	12.
óra/tanév	216	216	216	224
óra/hét	6	6	6	7

Az iskolai matematikatanítás célja, hogy hiteles képet nyújtson a matematikáról mint tudásrendszerről és mint sajátos emberi megismerési, gondolkodási, szellemi tevékenységről. A matematika tanulása érzelmi és motivációs vonatkozásokban is formálja, gazdagítja a személyiséget, fejleszti az önálló, rendszerezett gondolkodást, és alkalmazásra képes tudást hoz létre.

A középfokú képzés során a matematika tanulása-tanítása tekintetében az egyik legfontosabb feladat a tanuló önálló, rendszerezett, logikus gondolkodásának kialakítása, fejlesztése. A 9. évfolyamtól kezdve a spirális felépítésnek megfelelően – a korábbi képzési szakaszok során megszerzett készségekre, képességekre és ismeretekre alapozva – egyre absztraktabb formában épül fel a matematika belső struktúrája (fogalmak definíciója, tételek, bizonyítások).

A 9–12. évfolyamokon fokozatosan hangsúlyosabbá válik a matematika deduktív jellege. Az új fogalmakat, algoritmusokat, ismereteket viszont továbbra is induktív módon, szemléltetéssel, felfedeztetéssel, tanulói tevékenységekre építve, a valósághoz kapcsolva kell bevezetni.

Jól megválasztott problémák tárgyalása során válik a tanulók számára is szükségessé az új fogalmak bevezetése és pontos definiálása. Tanári irányítással a tételek, általános összefüggések is felfedeztetők a tanulókkal. Ezen folyamat során fejlődik a tanulók szintetizáló és modellalkotó képessége. A felfedezett tételek és összefüggések egy része bizonyítás nélkül is gyarapítja a matematikai eszköztárat. Néhány tétel bizonyítása azonban elengedhetetlen része a matematika tanításának, hiszen a bizonyításokon keresztül mutatható meg a matematika logikus és következetes felépítése. Az új fogalmak megalkotása, az összefüggések, stratégiák felfedezése és az ismereteknek feladatok, problémák megoldása során történő tudatos alkalmazása fejleszti a kombinatív készséget, a meglévő ismeretek mobilizálásának képességét, valamint a problémamegoldó gondolkodás eltérő típusainak adekvát használatát. Ennek a folyamatnak az eredményeképpen a tanuló meg tudja állapítani adott állítás, tétel érvényességi és alkalmazási körét, megállapításai, állításai mellett logikusan tud érvelni. A matematika tanulásának-tanításának egyik fő célja, hogy fejlődjön a tanuló mérlegelő gondolkodása, az adatok elemzését, szintézisét és értékelését lehetővé tevő készségek és képességek rendszere. A matematikai játékok, logikai feladványok fejlesztik a stratégiaalkotást, az algoritmikus gondolkodást, a kreativitást és a gondolkodás rugalmasságát.

A matematika a maga hagyományos és modern eszközeivel segítséget ad a természettudományok, az informatika, a technika és a humán tanulási területek ismeretanyagának tanulmányozásához, a mindennapi problémák, a természeti és a gazdasági folyamatok értelmezéséhez és kezeléséhez. Ehhez – több más fogalom mellett – szükséges a függvény fogalmának változatos (nemcsak számhalmazokon értelmezett) példák mentén történő kiterjesztése.

A tanuló a matematika szaknyelvét érti és tudatosan használja. Életkorának megfelelő matematikai, matematikatörténeti szöveget képes önállóan olvasni, értelmezni. Mind írásban, mind szóban képes gondolatait a matematika szaknyelvének szabatos alkalmazásával közölni. A tanuló különböző forrásokat (tankönyv, függvényábrázat, saját jegyzet, digitális források) használhat az órákon és a számonkérések alkalmával, bizonyos tételek, azonosságok, képletek felidézésére.

A tanuló társaival közösen tervez és hajt végre kooperatív tevékenységeket, projekteket. A közös munkában érvel, képes a vitára, az érvei ütköztetésére. Mérlegeli és kontrollálja mind a társai, mind a saját véleményét.

Ebben az életkorban is érvényesülnie kell a tanuló érdeklődésének, adottságának, absztrakciós szintjének megfelelő differenciálásnak.

A tanuló digitális eszközöket, a tanulást, a szemléltetést, a tapasztalatszerzést és a felfedezést segítő szoftvereket, digitális információforrásokat használ, a matematika alkalmazását segítő számítógépes programokat ismer meg. Aktív résztvevője a tanulási-tanítási folyamatnak, ami lehetővé teszi azon kompetenciáinak és tervezési stratégiáinak a fejlődését, amelyek segítik a mai gyorsan változó világban való eligazodást és a különböző élethelyzetekben előforduló problémák megoldását.

A matematika tantárgy a kulcskompetenciákat az alábbi módon fejleszti:

A tanulás kompetenciái: A matematika tanulása során elengedhetetlen a tananyag alapos és átfogó megértése. A szöveges feladatok megoldása fejleszti az értő olvasás és a releváns információk kiválasztásának készségét. Az általánosítás és az analógiák adekvát használata, több szempont egyidejű figyelembevétele, a rendszerezési képesség, a megszerzett tudás új helyzetekben való alkalmazása elősegítik az aktív, önirányított tanulás kompetenciáinak kialakítását, fenntartását, megerősítését. A matematika tantárgy a matematikai logika és az algoritmikus gondolkodás fejlesztésével, az ok-okozati összefüggések megláttatásával hozzájárul a többi tantárgy tanulásához szükséges rendszerező, összefüggéseket felismerő, ezáltal hatékony önálló tanulási módszerek elsajátításához és megfelelő alkalmazásához is.

A kommunikációs kompetenciák: A matematika fejleszti a tanuló azon képességét, hogy világosan, röviden és pontosan fejezze ki gondolatait. A matematika tanulása során fokozatosan alakul ki a tanuló érvelési és vitakészsége. A szöveges problémák megoldása javítja a szöveg megértésének készségét: a tanulónak meg kell keresnie az információkat és fel kell ismernie egy adott információ jelentőségét a probléma megoldása során. A matematika tanulási folyamatában kialakul a különböző módon (szöveg, grafikon, táblázat, diagram és képlet) bemutatott tartalmak megértésének és alkotásának készségrendszere.

A digitális kompetenciák: A matematika tanulása során hangsúlyos szerepet kap a problémamegoldás és az algoritmikus gondolkodás, melyek elősegítik a tanuló digitális kompetenciáinak fejlesztését. A különböző matematikai tárgyú szoftverek, alkalmazások, applikációk és játékok alkalmazásán keresztül a matematika tanulása hozzájárul a tanuló digitális kultúrájának kialakításához.

A matematikai, gondolkodási kompetenciák: A matematika tanulása során a tanuló gondolkodásának fejlesztése elsősorban konkrét problémák megoldásán keresztül történik. A tanuló előzetes tudása és tapasztalata alapján azonosítja a problémákat, majd ismert matematikai fogalmakra támaszkodva stratégiát dolgoz ki ezek megoldására. Elfogadja, hogy a megoldás több különböző úton is elképzelhető, illetve találkozhat olyan nyitott problémákkal is, amelyeknek több megoldása is lehetséges. Kellő kitartással próbál ki különböző matematikai módszereket, és felismeri azokat a problémákat is, amelyeknek nincs megoldása.

A tanuló mérlegelő gondolkodásának fejlesztése többek között a feladatok megoldása során kapott eredmények elemzésén és értékelésén keresztül történik. A tanuló megtanul induktív úton példákat általánosítani és deduktív érvelést használni a matematikai állítások bizonyítására.

A személyes és társas kapcsolati kompetenciák: A matematika tanulása fejleszti a kitartás, a pontosság, a figyelem és a fegyelmezettség képességét. A matematika tanulása során keresztül erősödik a tanuló felelősségtudata, gazdagodik az önképe, fejlődik a kooperációs készsége. A tanuló matematikai ismereteit alkalmazni tudja az egyéni célok eléréséhez szükséges tervezésben, az életét befolyásoló döntései megalapozásában és meghozatalában, a várható következmények mérlegelésében. A matematika tanulása elősegíti annak belátását, hogy a személyes erősségekre építeni, a hibákból pedig tanulni lehet.

A tanuló a matematikai foglalkozások során megtanulja, hogyan oszthatja meg ötleteit másokkal, és hogyan segítheti társait a matematikai fogalmak megértése vagy azok alkalmazása során. Felelősséget vállal a közösen kitűzött feladatok elvégzéséért, s megtanulja tisztelni mások álláspontját, gondolkodásmódját.

A kreativitás, a kreatív alkotás, önkifejezés és kulturális tudatosság kompetenciái: A matematika olyan tudomány, amely összeköti a különböző kultúrákat. A tanuló megismeri a gondolkodás logikai felépítésének eleganciáját, a matematikának a természethez, a művészetekhez és az épített környezethez fűződő viszonyát.

A tanuló konkrét vagy képi reprezentációval vagy szimbolikus modellekkel végzi a matematikai gondolatok vagy kapcsolatok feltárását, majd új kapcsolatokat alakít ki a matematikai fogalmak között.

Munkavállalói, innovációs és vállalkozói kompetenciák: A kompetencia fejlesztése valódi adatok felhasználásával összeállított mindennapi problémák megoldásán keresztül történik. Ennek során a különböző megoldási lehetőségek keresése fejleszti a gondolkodás rugalmasságát és az új ötletek megalkotásának képességét. A tanuló megfelelő játékokon keresztül képessé válik a különböző kockázatok felmérésére, a számára kedvezőnek tűnő stratégia kidolgozására, és megtapasztalja döntései következményét. A matematikai projekteken való részvétel segíti a későbbi munkavállalás szempontjából fontos készségek kialakulását (kreativitás, problémamegoldás, kezdeményezőkézség, másokkal való együttműködés készsége).

Minden életkori szakaszban fontos a differenciálás. Ez nemcsak az egyéni igények figyelembevételét jelenti. Sokszor az alkalmazhatóság vezérli a tananyag és a tárgyalásmód megválasztását, más esetekben a tudományos igényesség szintje szerinti differenciálás szükséges. Egy adott osztály matematikatanítása során a célok, feladatok teljesíthetősége igényli, hogy a tananyag megválasztásában a tanulói érdeklődés és a pályaaorientáció is szerepet kapjon. A matematikát alkalmazó pályák felé vonzó tanulókat gondolkodtató, kreativitást igénylő versenyfeladatokkal motiválhatók, a humán területen továbbtanulni szándékozók számára érdekesebb a matematika kultúrtörténeti szerepének kidomborítása, másoknak a középiskolai matematika gyakorlati alkalmazhatósága fontos. A fokozott szaktanári figyelem, az iskolai könyvtár és az elektronikus eszközök használatának lehetősége segíthetik az esélyegyenlőség megvalósulását.

Ebben a kerettantervben a négy osztályos gimnázium olyan tanulóinak kívánunk magasabb szintű ismereteket nyújtani, akik nagyobb érdeklődést mutatnak a matematika iránt.

9–10. évfolyam

A matematika kerettantervnek ez a fejezete a négyosztályos gimnáziumok azon tanulóinak szól, akik matematikából emelt szintű képzést választottak. Ezért a tananyag összeállításánál feltételezhetjük, hogy az átlagosnál jobb képességű, érdeklődőbb tanulóknak szól. A normál osztályokéhoz képest kiegészítő elemek kerülnek a tananyagba. Egyrészt olyanok, amelyek a motivációt növelhetik (pl. matematikatörténeti vonatkozások, játékok). Ha ezek a témakörök nem is nyújtanak közvetlen segítséget a versenyeken, érettségien, vagy majd a felsőfokú oktatásban való eredményesebb szerepléshez, mégis, ezeket jobb és kevésbé erős csoportokban egyaránt érdemes komolyan venni, rendszeresen beiktatni, mert a tantárgyhoz való kötődésben bekövetkező pozitív változás miatt a ráfordított idő bőven megtérül.

Másrészt olyan tananyagelemeket is szerepeltetünk ezeken az évfolyamokon, amelyek magabiztosabbá teszik a tanulók ismereteit, kitekintést nyújtanak egy-egy témakör szélesebb körű alkalmazásaira, segíthetik a versenyeken való eredményesebb szereplésüket. Ezeket az ismereteket az osztály vagy csoport szintjének megfelelő mélységben tárgyaljuk. A kevésbé erős csoportokban sem javasoljuk ezek elhagyását, mert a szemlélet fejlesztéséhez fontosak. Ezeknél a kerettanterv általában szemléletes, bizonyítás nélküli tárgyalást javasol. Az erősebb csoportokban tárgyalhatjuk ezeket részletesebben, több feladattal.

A középiskola első két évfolyamán sok, korábban már szereplő ismeret, összefüggés, fogalom újra előkerül úgy, hogy a fogalmak definiálásán, az ismeretek igazolásán, rendszerezésén, kapcsolataik feltárásán és alkalmazási lehetőségeik megismerésén lesz a hangsúly. Ezért a tanulóknak meg kell ismerkedniük a tudományos feldolgozás alapvető módszereivel. (Mindenki által elfogadott alapelvek/axiómák, már bizonyított állítások, új sejtések, állítások megfogalmazása és azok igazolása, a fentiek összegzése, a nyitva maradt kérdések felsorolása, a következmények elemzése.)

A fenti célok az általános iskolai matematikatanítás céljaihoz képest jelentős többletet jelentenek. Fontos, hogy változatos módszertani megoldásokkal tegyük könnyebbé az átmenetet. Hasznosak lehetnek ebből a szempontból a matematikai alapú játékok is. A gyerekek szívesen játszanak maradékos osztáson, oszthatósági szabályokon alapuló számjátékokat és szimmetriákon alapuló geometriai, rajzos játékokat. Nyerni akarnak, ezért természetes módon elemezni kezdik a szabályokat, lehetőségeket. Olyan következtetésekre jutnak, olyan elemzéseket végeznek, amelyeket hagyományos feladatokkal nem tudnánk elérni. A geometria egyes területeinek (szimmetriák, aranymetszés) a művészetekben való alkalmazásait bemutatva világossá tehetjük a tanulók előtt, hogy a matematika a kultúra elválaszthatatlan része. A témakör egyes elemeihez kapcsolódva mutassuk be néhány matematikus életútját. Az ezekre a témákra fordított idő bőven megtérül az ennek következtében növekvő érdeklődés, javuló motiváció miatt.

Változatos példákkal, feladatokkal mutathatunk rá arra, hogy milyen előnyöket jelenthet a mindennapi életben, ha valaki jól tud problémákat megoldani. Gazdasági, sport témájú feladatokkal, számos geometriai és algebrai szélsőérték-feladattal lehet gyakorlati kérdésekre optimális megoldásokat keresni.

A középiskolás kor már alkalmassá teszi a tanulókat az önálló ismeretszerzésre. Legyen követelmény, hogy egyes adatoknak, fogalmaknak, ismereteknek könyvtárban, interneten nézzenek utána. Ez a kutatómunka hozzájárulhat a tanulók digitális kompetenciájának fejlesztéséhez, ugyanezt szolgálhatja a geometriai és egyéb matematikai programok használata is.

Ebben a szakaszban is fontos cél, hogy az ismeretszerzési folyamat során a tanuló – a lehetőségekhez mérten – a tanár által irányított módon, feladatok megoldása mentén maga

fedezze fel az összefüggéseket, általánosítási lehetőségeket, megoldási módokat. A kooperatív munkaformák, a csoportmunkában megoldandó projektfeladatok fejlesztik a matematikai kommunikációt. A digitális eszközök, dinamikus szoftverek, online felületek támogatják a szemléltetést, a megértést és a felfedeztetést.

Az egyes tematikus egységekre javasolt óraszámokat a táblázatok tartalmazzák. Ezen kívül ismétlésre 10-10 órát terveztünk.

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Gondolkodási módszerek, halmazok, matematikai logika, kombinatorika, gráfok Halmazok, ponthalmazok	Órakeret 30 óra
Előzetes tudás	Csoportosítás különböző szempontok alapján. Halmazműveletek véges halmazokon. Halmazábra. Számhalmazok, ponthalmazok.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A halmaz fogalmának ismerete, alkalmazása problémamegoldásra, matematikai modellek alkotására. Több szempont alkalmazása – megosztott figyelem fejlesztése. Definíciók, jelölések használata – az emlékezet fejlesztése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>Halmazok. Halmazokkal kapcsolatos ismeretek: üres halmaz, részhalmaz, halmazok egyenlősége. Halmazműveletek: unióképzés, metszetképzés, különbségképzés, szimmetrikus differencia, komplementerhalmaz. Descartes-féle szorzat. A fogalmak ismétlése, alkalmazása több halmazra. Pontos definíciók, jelölések használata. Halmazok felbontása diszjunkt halmazok uniójára. A halmazműveletek tulajdonságai. Összevetés a logikai műveletek tulajdonságaival. Halmazok számossága. n elemű halmaz részhalmazainak a száma. Véges és végtelen halmazok. <i>Matematikatörténet:</i> Georg Cantor.</p>		<p><i>Informatika:</i> könyvtárszerkezet a számítógépen; adatbázis-kezelés, adatállományok, adatok szűrése különböző szempontok szerint.</p> <p><i>Magyar nyelv és irodalom:</i> mondatok, szavak, hangok rendszerezése.</p> <p><i>Biológia-egészségtan:</i> rendszerintan.</p>
<p>Konstrukciók. Lehetetlenségi bizonyítások. Adott tulajdonságú objektumok konstruálása. Adott tulajdonságú sorozatok készítése. Adott tulajdonságú halmazok konstruálása. Ábrák színezése, lefedése adott feltételek szerint.</p>		
<p>Logika, A matematikai bizonyítás fogalma Logikai műveletek: negáció, konjunkció, diszjunkció, implikáció, ekvivalencia. Adott állítás megfordításának megfogalmazása A köznapi szóhasználat és a matematikai szóhasználat</p>		

<p>összevetése. Logikai és halmazelméleti műveletek kapcsolata. Stratégiai és logikai játékok <i>Matematikatörténet:</i> Pólya György, George Boole.</p>	
<p>Kombinatorika. Permutáció – ismétlés nélkül és ismétléssel. Variáció – ismétlés nélkül és ismétléssel. Kombináció – ismétlés nélkül. Vegyes kombinatorikai feladatokon keresztül ismétlés, a feladatmegoldási rutin mélyítése. Jelek használata: $n!$, $\binom{n}{k}$. Binomiális együtthatók, egyszerű tulajdonságaik. Pascal-háromszög. <i>Matematikatörténet:</i> Blaise Pascal, Erdős Pál. Néhány kombinatorikus geometriai feladat. n pont maximum hány egyenest határoz meg? n egyenesnek maximum hány metszéspontja lehet? n egyenes maximum hány részre osztja a síkot? Gráfok. Néhány probléma ábrázolása gráfokkal.</p>	
<p>Kulcsfogalmak/ fogalmak</p>	<p>Véges és végtelen halmaz, unió, metszet, különbség, komplementer halmaz. Permutáció, variáció, kombináció.</p>

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Számelmélet, algebra Valós számok	Órakeret 25 óra
Előzetes tudás	Természetes számok, egész számok, racionális számok halmaza. Műveletek elvégzése a racionális számok halmazán fejből, írásban, számológéppel. Műveletek sorrendje, zárójelek használata. Hatványozás. A négyzetgyök fogalma.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Számkörbővítés elveinek megértése, a valós számok halmazának ismerete. Gondolkodás: ismeretek rendszerezésének fejlesztése. Indirekt bizonyítási módszer alkalmazása. Absztrakciós készség fejlesztése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>Számhalmazok:</p> <ul style="list-style-type: none"> - természetes számok, - egész számok, - racionális számok, - irracionális számok, - valós számok. <p>Mely műveletek nem vezetnek ki az egyes számhalmazokból? A racionális számok halmazán végzett műveletek biztonságos elvégzése – ismétlés, gyakorlás. Műveleti tulajdonságok alkalmazása: kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás.</p>		<p><i>Fizika, kémia, biológia-egészségtan:</i> a tér, az idő, az anyagmennyiség nagy és kis méreteinek megadása normálalakokkal.</p>

<p>Számok tizedes tört alakja. Véges, végtelen szakaszos, végtelen nem szakaszos tizedes törtek. Valós számok adott jegyre kerekítése Abszolút érték, az ellentett, a reciprok fogalma. Nyílt intervallum, zárt intervallum. Valós számok hatványozása pozitív egész kitevőre. Hatványozás 0 és negatív egész kitevőre. A hatványozás azonosságai. Számok normálalakja. Számolás normálalakban felírt számokkal. Normálalak a számológépen. A valós számok és a számegyenes kapcsolata. A racionális számok halmaza nem elegendő a számegyenes pontjainak jelölésére.</p>	
<p>Négyzetgyök. A négyzetgyökvonás azonosságai. \sqrt{n} irracionális, ha n nem négyzetszám. Indirekt bizonyítás. Bevitel a gyökjel alá. Kivitel a gyökjel alól. Nevező gyöktelenítése.</p>	
<p>Az n-edik gyök fogalma. A gyökvonás azonosságai. Páros és páratlan gyökkitevő. Bevitel a gyökjel alá. Kivitel a gyökjel alól. A szerkeszthetőség néhány kérdése. A tört kitevőjű hatvány. Permanencia-elv.</p>	
<p>Kulcsfogalmak/ fogalmak</p>	<p>Valós szám, normálalak, négyzetgyök, n-edik gyök.</p>

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Számelmélet, algebra Algebrai kifejezések használata	Órakeret 25 óra
Előzetes tudás	Összefüggések leírása algebrai kifejezésekkel, $(a \pm b)^2$, $a^2 - b^2$, helyettesítési érték, zárójelfelbontás.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Algebrai kifejezések biztonságos használata, célszerű átalakítási módok megtalálása, elvégzése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>Algebrai kifejezések. Egész kifejezések, polinomok, törtkifejezések. Racionális és nem racionális kifejezések.</p>		<p><i>Fizika;</i> <i>kémia:</i> mennyiségek kiszámítása képlet alapján, képletek átrendezése.</p>
<p>Nevezetes azonosságok: $(a \pm b)^2$, $(a + b + c)^2$, $a^2 - b^2$, $a^3 - b^3$, $a^3 + b^3$. Utalás $(a + b)^n$ kiszámításra Pascal-háromszög segítségével.</p>		

<p>Azonos átalakítások.</p> <p>Polinomok összeadása, kivonása.</p> <p>Polinomok szorzása, hatványozása.</p> <p>Szorzáttá alakítás különböző módszerei.</p> <p>Polinom osztása polinommal.</p> <p>Algebrai törtekkel végzett műveletek.</p> <p>Algebrai törtek egyszerűsítése, összeadása, kivonása, szorzása, osztása.</p> <p>Kifejezések legnagyobb közös osztója, legkisebb közös többszöröse.</p> <p><i>Matematikatörténet: algebra – Al-Hvarizmi.</i></p>	
<p>Számtani, mértani, négyzetes és harmonikus közép, a köztük lévő egyenlőtlenség.</p> <p>Algebrai bizonyítás két változóra.</p> <p>Szélsőérték-feladatok közepek segítségével.</p> <p>Kapcsolat: másodfokú függvények vizsgálata.</p>	
<p>Kulcsfogalmak/ fogalmak</p>	Algebrai kifejezés, polinom, algebrai tört, azonosság.

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Számelmélet, algebra Oszthatóság	Órakeret 30 óra
Előzetes tudás	Osztó, többszörös, prímszám, prímtényező felbontás, legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A korábbi években szerzett ismeretek elmélyítése, bővítése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>Osztó, többszörös, oszthatóság, oszthatósági szabályok.</p> <p>Az oszthatósági szabályok rendszerezése.</p> <p>Analógiák nem tízes alapú számrendszerek oszthatósági szabályaiban.</p> <p>Példák egyéb számokkal (pl. 7-tel, 11-gyel) való oszthatóságra tízes számrendszerben.</p> <p>Algebrai azonosságok alkalmazása oszthatósági feladatokban.</p> <p>Teljes indukció alkalmazása oszthatósági feladatokban.</p>		
<p>Prímszám, összetett szám, prímtényező felbontás.</p> <p>A számelmélet alaptétele.</p> <p>Végtelen sok prímszám van.</p> <p>Néhány további tétel és sejtés a prímszámok elhelyezkedéséről.</p> <p>Osztók számának, összegének, szorzatának meghatározása a prímtényező felbontásból.</p> <p><i>Matematikatörténet: Euklidesz, Eratoszthenész, Euler.</i></p>		<p><i>Informatika:</i> nagy prímelek szerepe a titkosításban.</p>

Diophantoszi egyenletek. Lineáris diophantoszi egyenlet. Szöveges feladatok megoldása diophantoszi egyenlettel. <i>Matematikatörténet: Diophantosz.</i>	
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Osztó, többszörös, prím, prímtényező felbontás, a számelmélet alaptétele, legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös.

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Számelmélet, algebra Egyenlet, egyenlőtlenség, egyenletrendszer	Órakeret 57 óra
Előzetes tudás	Egyismeretlenes, elsőfokú egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása. Alaphalmaz vizsgálata, ellenőrzés. Azonosság. Szöveges feladatok – matematikai modell alkotása.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Gyakorlati problémák matematikai modelljének felállítása, a modell hatókörének vizsgálata, a kapott eredmény összevetése a valósággal; az ellenőrzés fontossága. A problémához illő számítási mód kiválasztása, eredmény kerekítése a problémának megfelelően. Számológép használata. Az önellenőrzés képességének fejlesztése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
Elsőfokú egyenletek. Alaphalmaz, megoldáshalmaz, igazsághalmaz. Ekvivalens átalakítások. Elsőfokú paraméteres egyenletek. Egyenletek grafikus megoldása.		<i>Fizika; kémia:</i> képletek értelmezése, egyenletek rendezése.
Elsőfokú egyenlettel megoldható szöveges feladatok. A korábban tanult módszerek elmélyítése. Százalékszámítással kapcsolatos hétköznapi helyzetek, és más tantárgyakhoz köthető feladatok megoldása. További módszerek szöveges feladatok megoldására. Példák egyenlet nélküli megoldási módszerekre.		<i>Fizika:</i> kinematika, dinamika. <i>Kémia:</i> oldatok összetétele.
Törtes egyenletek, egyenlőtlenségek. Értelmezési tartomány vizsgálata, hamis gyök. Mikor lesz egy tört értéke nulla, pozitív, negatív?		
Abszolút értéket tartalmazó egyenletek. (Több abszolút értéket tartalmazók is.) Abszolút értéket tartalmazó egyenlőtlenségek. Algebrai és grafikus megoldás.		<i>Fizika:</i> a mérés hibája.
Elsőfokú egyenletrendszerek. Egyenletrendszerek grafikus megoldása. Behelyettesítő módszer. Egyenlő együtthatók módszere. Új ismeretlen bevezetése. Elsőfokú paraméteres egyenletrendszerek. Egyenletrendszerrel megoldható szöveges feladatok. A kapott eredmény értelmezése, valóságtartalmának vizsgálata.		<i>Informatika:</i> számítógépes program használata.

<p>Elsőfokú egyenlőtlenségek. Egyenlőtlenségek grafikus megoldása. Egyismeretlenes egyenlőtlenségrendszer.</p>	
<p>Másodfokú függvények vizsgálata. Teljes négyzetté alakítás használata. Szélsőérték-feladatok. Másodfokú függvény vizsgálatával. Kapcsolat: számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség felhasználásával történő megoldás. Optimális megoldásokra törekvés. Másodfokú egyenletek. Grafikus megoldás. Teljes négyzetté kiegészítés. Egyenletmegoldás szorzattá alakítással. A másodfokú egyenlet megoldóképlete. A megoldóképlet készségi szintű alkalmazása. Számológép használata. A másodfokú egyenlet diszkriminánsa. Diszkusszió. Önellenőrzés. Gyöktényező alak, Viete-formulák. Másodfokúra visszavezethető egyenletek. Új ismeretlen bevezetése. Racionális gyökök keresése. Viete-formulák. Néhány további módszer az egyenlet speciális tulajdonságainak felhasználásával.</p>	<p><i>Fizika:</i> fizikai tartalmú minimum- és maximumproblémák. <i>Filozófia:</i> egy adott rendszeren belül megoldhatatlan problémák létezése.</p>
<p>Másodfokú egyenlettel megoldható szöveges feladatok. Modellalkotás, megoldási módszerek.</p>	<p><i>Fizika:</i> egyenletesen gyorsuló mozgás leírása. <i>Informatika:</i> számítógépes program használata.</p>
<p>Másodfokú egyenlőtlenségek. A megoldás megadása másodfokú függvény vizsgálatával. Többféle megoldási módszer összevetése.</p>	
<p>Másodfokú egyenletrendszer. Másodfokú egyenletrendszerrel megoldható szöveges feladatok. Emlékezés korábban megismert módszerekre, alkalmazás az adott környezetben.</p>	<p><i>Fizika:</i> ütközések.</p>
<p>Gyökös egyenletek. Ekvivalens és nem ekvivalens egyenlet-megoldási lépések. Hamisgyök, gyökvesztés. Önellenőrzés képességének fejlesztése.</p>	
<p>Paraméteres másodfokú és másodfokúra visszavezethető egyenletek. Esetsztésválasztások, divergens gondolkodás fejlesztése.</p>	

Kulcsfogalmak/ fogalmak	Elsőfokú egyenlet, egyenlőtlenség, értelmezési tartomány, azonosság. Ekvivalens átalakítás, hamis gyök. Másodfokú egyenlet, egyenlőtlenség, megoldóképlet, diszkrimináns. Egyenletrendszer. Négyzetgyökös egyenlet. Paraméteres egyenlet.
------------------------------------	---

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Geometria Alapfogalmak, ponthalmazok, egybevágósági transzformációk	Órakeret 53 óra
Előzetes tudás	Tételek kölcsönös helyzete, távolsága. Háromszögek, négyszögek, sokszögek tulajdonságai. Speciális háromszögek, négyszögek elnevezése, felismerése, tulajdonságaik. Háromszögek szerkesztése alapadatokból. Háromszög köré írt kör és beírt kör szerkesztése. A Pitagorasz-tétel és a Thalész-tétel ismerete. Geometriai transzformációk, a szimmetria felismerése környezetünkben, alkalmazásuk egyszerű feladatokban.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A geometriai szemlélet, látásmód fejlesztése. A definíciók és tételek pontos ismerete. Bizonyítások gyakorlása. A szükséges és az elégséges feltétel felismerése. Összetett számítási probléma lebontása, számítási terv készítése (megfelelő részlet kiválasztása, a részletszámítások logikus sorrendbe illesztése). A geometriai transzformációk átfogó ismerete, alkalmazása problémamegoldásban. Szimmetria szerepének felismerése a matematikában, a művészetekben. Tájékozódás valóságos viszonyokról térkép és egyéb vázlatok alapján. Valós probléma geometriai modelljének megalkotása, számítások a modell alapján, az eredmények összevetése a valósággal. Számítógép használata geometriai feladatokban.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
Geometriai alapfogalmak. Tételek; kölcsönös helyzete, távolsága, szöge. Sokszögek szögösszege, átlók száma. A szög ívmértéke. A radián mint mértékegység. Átváltás fok és radián között.		<i>Fizika:</i> szögsebesség, szöggyorsulás. <i>Vizuális kultúra:</i> térbeli viszonyok.
Nevezetes ponthalmazok rendszerezése. – adott térelemtől adott távolságra lévő pontok halmaza – síkban és térben; – két térelemtől egyenlő távolságra lévő pontok halmaza – síkban és térben. Parabola, forgási paraboloid. Egyenlőtlenséggel meghatározott ponthalmazok. Ponthalmazok a koordinátasíkon. Koordinátákkal megadott feltételek. <i>Matematikatörténet:</i> Descartes. Két vagy három feltételnek megfelelő ponthalmazok szerkesztése. Háromszög beírt, körülírt, hozzáírt körei. Háromszög további nevezetes vonalai. (Bizonyítással.) Középvonalak.(Négyszögek középvonalai is.) Magasságok – magasságpont. Súlyvonalak – súlypont. Nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van – és fordítva.		<i>Fizika:</i> parabolatükör. <i>Informatika:</i> geometriai szerkesztőprogram használata.

Euler-egyenes, Feuerbach-kör .	
<p>Négyszögek, sokszögek.</p> <p>Speciális négyszögek (trapéz, húrtrapéz, paralelogramma, deltoid, rombusz téglalap, négyzet) tulajdonságai, területének kiszámítása.</p> <p>Konvex sokszögek: átlók száma, belső és külső szögösszegek.</p> <p>Szabályos sokszögek, területük átdarabolással.</p> <p>Kör: középponti szög, körív, körívk, körgyűrű, körszelet, érintő szakaszok</p> <p>Pitagorasz tétele és a tétel megfordítása. Számítási feladatok síkban és térben.</p> <p>Pitagorasz tételének alkalmazása bizonyítási feladatokban. Mikor hegyesszögű, illetve tompaszögű a háromszög? Két pont távolsága koordináta-rendszerben. A paralelogramma oldalainak négyzetösszege egyenlő az átlók négyzetösszegével. Négyszög átlói merőlegességének feltétele.</p> <p><i>Matematikatörténet: Pitagorasz.</i></p>	<p><i>Fizika:</i> vektor felbontása merőleges összetevőkre.</p>
<p>Thalész tétele és a tétel megfordítása. Szerkesztési és bizonyítási feladatok. Körérintő szerkesztése.</p> <p><i>Matematikatörténet: Thalész.</i></p>	
<p>Kerületi és középponti szögek. Húrnégyszög. Érintőnégyyszög.</p>	
<p>Geometriai transzformáció fogalma. Egybevágósági transzformációk rendszerező ismétlése. Tengelyes tükrözés, középpontos tükrözés, forgatás, eltolás, identitás.</p> <p>A geometriai transzformációk tulajdonságai:</p> <ul style="list-style-type: none"> - fixpont, fix egyenes, fix sík, - szögtartás, távolságtartás, irányítástartás. <p>Szimmetrikus alakzatok, szimmetrián alapuló játékok. Geometriai transzformációk szorzata.</p>	<p><i>Informatika:</i> geometriai szerkesztőprogram használata.</p>
<p>Geometriai szélsőérték-feladatok. Háromszögbe írt minimális kerületű háromszög.</p>	<p><i>Földrajz:</i> minimális utak meghatározása.</p>
<p>Az egybevágóság fogalma. Alakzatok egybevágósága. A háromszögek egybevágóságának alapesetei.</p>	
<p>Műveletek vektorokkal: Összeadás, kivonás, számmal való szorzás. Vektorfelbontás tétele. Vektor koordinátái. Analogia a számhalmazokon végzett műveletekkel.</p>	<p><i>Fizika:</i> vektormennyiségek: erő, sebesség, gyorsulás, térerősség.</p>

Kulcsfogalmak/ fogalmak	Térelem, sokszög, Pitagorasz-tétel, Thalész-tétel, egybevágósági transzformáció. Vektor. Kerületi és középponti szög. Húrnégyszög. Érintőnégyyszög.
------------------------------------	---

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Geometria Hasonlóság és kapcsolódó tételek	Órakeret 42 óra
Előzetes tudás	Egybevágósági transzformációk. A háromszögek egybevágóságának alapesetei. Számítási és mértani közép. A számítási és a mértani közép közötti egyenlőtlenség.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A geometriai szemlélet, látásmód fejlesztése. A definíciók és tételek pontos ismerete. Bizonyítások gyakorlása. Tájékozódás valóságos viszonyokról térkép és egyéb vázlatok alapján. Valós probléma geometriai modelljének megalkotása, számítások a modell alapján, az eredmények összevetése a valósággal. Számítógép használata geometriai feladatokban.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
A párhuzamos szelők tétele (bizonyítás nélkül) és megfordítása, következmények. Szögfelező tétel. A párhuzamos szelőszakaszok tétele. Szakasz arányos osztása. Negyedik arányos szerkesztése.		
A középpontos hasonlóság fogalma és tulajdonságai. A hasonlósági transzformáció fogalma és tulajdonságai. Szerkesztési, számítási, bizonyítási feladatok.		<i>Földrajz:</i> térképek. <i>Vizuális kultúra:</i> építészeti tervrajzok. <i>Fizika:</i> optikai eszközök nagyítása.
Hasonló alakzatok. A háromszögek hasonlóságának alapesetei. A sokszögek hasonlósága. A hasonló síkidomok területének aránya. A hasonló testek felszínének és térfogatának aránya. Annak tudatosítása, hogy kicsinyítésnél, nagyításnál a lineáris méretek, a felszín és térfogat nem egyformán változik.		<i>Fizika:</i> hasonló háromszögek alkalmazása – lejtőmozgás, geometriai optika. <i>Biológia-egészségtan:</i> példák arra, amikor az a hasznos, hogy adott térfogathoz nagy felszín, illetve, amikor adott térfogathoz kis felszín tartozzon.
Arányossági tételek háromszögekben. Magasságtétel, befogótétel. A számítási és a mértani közép közötti egyenlőtlenség		<i>Vizuális kultúra:</i> festészet, építészet.

<p>geometriai bizonyítása. Mértani közép szerkesztése. Egyszerű szélsőérték-feladatok. Körhöz húzott érintő- és szelőszakaszok tétele. Aranymetszés.</p>	<p><i>Ének-zene:</i> az aranymetszés megjelenése zenei művekben.</p>
<p>Néhány kapcsolódó tétel. Euler tétele a beírt és körülírt kör középpontjának távolságára. Feuerbach-kör és Euler-egyenes. (Célszerű a bizonyításokat megmutatni, a bennük lévő ötletek miatt, de a teljes bizonyítások megtanulása nem szükséges.)</p>	
<p>Kulcsfogalmak/ fogalmak</p>	<p>Hasonlósági transzformáció, hasonló alakzat, számtani és mértani közép.</p>

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Függvények Algebrai függvények	Órakeret 21 óra
<p>Előzetes tudás</p>	<p>Halmazok. Hozzárendelés fogalma. Grafikonok készítése, olvasása. Pontok ábrázolása koordináta-rendszerben. Lineáris függvények, fordított arányosság függvénye.</p>	
<p>A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai</p>	<p>A tanult függvények felidézése. Függvénytranszformációk algebrai és geometriai megjelenítése. Összefüggések, folyamatok megjelenítése matematikai formában (függvény-modell), vizsgálat a grafikon alapján. A vizsgálat szempontjainak kialakítása. Számítógép bevonása a függvények ábrázolásába, vizsgálatába. Logikus, pontos gondolkodás, fogalmazás fejlesztése.</p>	
<p>Ismeretek/fejlesztési követelmények</p>		<p>Kapcsolódási pontok</p>
<p>Függvény fogalma. Rendszerező ismétlés. Értelmezési tartomány, értékkészlet. A függvény megadási módjai, ábrázolása, jellemzése: zérushely, monotonitás, szélsőérték. Új fogalmak: periodicitás, paritás, korlátosság. (Pontos definíciók. Néhány esetben a tagadás megfogalmazása is: pl. egy függvény nem páros, ha...) Kapcsolat: logika elemei – bármely, van olyan, negáció. Hétköznapi állítások tagadása. Pontos fogalmazás.</p>		<p><i>Informatika:</i> függvényábrázolás, grafikonkészítés számítógépes program segítségével. <i>Magyar nyelv és irodalom:</i> hétköznapi és szaknyelvi szóhasználat.</p>
<p>Lineáris függvények. Rendszerező ismétlés. Egyenes arányosság. Lineáris kapcsolatok felfedezése a hétköznapiakban.</p>		<p><i>Fizika; kémia:</i> egyenesen arányos mennyiségek.</p>
<p>Másodfokú függvények. Teljes négyzetté kiegészítés. Hatványfüggvények. Negatív egész kitevőjű hatványfüggvények. Abszolútérték-függvény. (Több abszolút értéket tartalmazók is.) Égészrész-, törtrész-, előjelfüggvény, Dirichlet-féle függvény.</p>		

Függvények inverze. Gyökfüggvények.	
Fordított arányosság, elsőfokú törtfüggvény.	<i>Fizika; kémia:</i> fordítottan arányos mennyiségek.
Függvénytranszformációk. A tanult függvények többlépéses transzformációi. A transzformációk rendszerezése, transzformációs sorrend. $ f(x) $ ábrázolása. Adott tulajdonságú függvények konstruálása.	
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Függvény, értelmezési tartomány, értékészlet, zérushely, monotonitás, szélsőérték, paritás. Függvénygrafikon, függvénytranszformáció.

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Függvények Hegyesszögek szögfüggvényei, szögfüggvények általánosítása, trigonometrikus függvények, egyenletek	Órakeret 55 óra
Előzetes tudás	Hasonlóság alkalmazása számolási feladatokban. Pitagorasz-tétel.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Síkbeli és térbeli ábra készítése a valós geometriai problémáról. Számítási feladatok, a megoldáshoz alkalmas szögfüggvény megtalálása. Számológép, számítógép használata. A függvény szemlélet alkalmazása az egyenletmegoldás során, végtelen sok megoldás keresése.	
Ismeretek és fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
Távolságok, magasságok meghatározása arányokkal. A valóság kicsinyített ábrájáról szögeket és szakaszokat határozunk meg méréssel és számolással. A hegyesszögek szögfüggvényeinek definíciója. Szögfüggvény értékének meghatározása számológéppel. Számítási feladatok szögfüggvények használatával síkban és térben.		<i>Fizika:</i> lejtőn mozgó testre ható erők kiszámítása.
Pótszögek szögfüggvényei. Összefüggések egy hegyesszög szögfüggvényei között. Egyszerű trigonometrikus összefüggések bizonyítása. Nevezetes szögek szögfüggvényei: 30°; 60°; 45°. (Megtanulandók.) 18°, 36°, 54°, 72°. (Kiszámolás az „aranyháromszögből”.) Hegyesszög egy tetszőleges szögfüggvényének értékéből a többi szögfüggvény pontos értékének kiszámolása.		
A szögfüggvények általános értelmezése. Forgásszög, egységvektor, vektorkoordináták. A szögfüggvények előjele a különböző síknegyedekben. Szögfüggvények közötti összefüggések. Egyszerű trigonometrikus összefüggések bizonyítása. A trigonometrikus függvények. A szögfüggvények értelmezési tartománya, értékészlete, zérushelyek,		<i>Fizika:</i> harmonikus rezgőmozgás, hullámmozgás leírása. <i>Informatika:</i> grafikonok elkészítése számítógépes

szélsőérték, periódus, monotonitás. A trigonometrikus függvények transzformáltjai, függvényvizsgálat.	programmal.
Szögfüggvények közötti összefüggések. Addíciós tételek: <ul style="list-style-type: none"> – két szög összegének és különbségének szögfüggvényei, – egy szög kétszeresének szögfüggvényei, – félszögek szögfüggvényei, – két szög összegének és különbségének szorzattá alakítása. A trigonometrikus azonosságok használata, több lehetőség közül a legalkalmasabb összefüggés megtalálása. Trigonometrikus kifejezések értékének meghatározása. Háromszögekre vonatkozó feladatok addíciós tételekkel.	
Trigonometrikus egyenletek. Az összes megoldás megkeresése. Hamis gyökök elkerülése. Trigonometrikus egyenlőtlenségek. Grafikus megoldás vagy egységkör alkalmazása. Időtől függő periodikus jelenségek vizsgálata. Trigonometrikus kifejezések szélsőértékének keresése.	<i>Fizika:</i> rezgőmozgás, adott kitéréshez, sebességhez, gyorsuláshoz tartozó időpillanatok meghatározása.
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Szögfüggvény, trigonometrikus függvények, addíciós tételek, trigonometrikus egyenletek

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Hatvány, gyök, logaritmus	Órakeret 40 óra
Előzetes tudás	Hatványozás egész kitevővel, hatványozás azonosságai, n-edik gyök, gyökvonás azonosságai. Valós számok halmaza.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A matematika belső fejlődésének felismerése, új fogalmak alkotása: a racionális kitevő értelmezése, az irracionális kitevőjű hatvány szemléletes fogalma. Tájékozódás a világ mennyiségi viszonyaiban: exponenciálisan, logaritmikusan változó mennyiségek. Más tudományágakban a matematika alkalmazásának felfedezése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
A racionális kitevőjű hatványok, a hatványozás azonosságainak ismételése. Számolás racionális kitevőjű hatványokkal, gyökös kifejezésekkel. Irracionális szám kétoldali közelítése racionális számokkal. A hatványfogalom kiterjesztése irracionális számra. Az exponenciális függvény. Az exponenciális függvény ábrázolása, vizsgálata.		<i>Technika, életvitel és gyakorlat:</i> kamatszámítás, hitelfelvétel, törlesztőrészlet-számítás. <i>Fizika:</i> radioaktivitás.
Exponenciális egyenletek, egyenlőtlenségek. Megoldás a definíció és az azonosságok alkalmazásával. Exponenciális egyenletre vezető valós problémák megoldása.		<i>Földrajz:</i> globális problémák (pl. demográfiai mutatók, a Föld eltartó képessége és az élelmezési válság, betegségek,

	világjárványok, túltermelés és túlfogyasztás).
<p>Számolás 10 hatványaival, 2 hatványaival.</p> <p>A logaritmus fogalma. Logaritmus értékének meghatározása a definíció alapján és számológéppel.</p> <p>A logaritmus azonosságai. Szorzat, hányados, hatvány logaritmus, áttérés más alapú logaritmusra. Az értelmezési tartomány változásának vizsgálata az azonosságok kétirányú alkalmazásánál. A logaritmus azonosságainak alkalmazása kifejezések számértékének meghatározására, kifejezések átalakítására.</p> <p><i>Matematikatörténet:</i> Napier, Kepler. A logaritmus fogalmának kialakulása, változása. Logaritmustáblázat.</p>	<p><i>Technika, életvitel és gyakorlat:</i> zajszenyezés.</p> <p><i>Kémia:</i> pH-számítás.</p>
<p>A logaritmusfüggvény. A logaritmusfüggvény ábrázolása, vizsgálata.</p> <p>Adott alaphoz tartozó exponenciális és logaritmusfüggvény kapcsolata. Inverz függvénykapcsolat.</p>	<p><i>Fizika:</i> régészeti leletek – kormeghatározás.</p>
<p>Logaritmosos egyenletek, egyenlőtlenségek. Megoldás a definíció és az azonosságok alkalmazásával. Értelmezési tartomány vizsgálatának fokozott szükségessége logaritmosos egyenleteknél.</p>	
Paraméteres exponenciális és logaritmosos egyenletek.	
Egyenletek ekvivalenciájával kapcsolatos ismeretek összegzése.	
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Racionális kitevőjű hatvány. Exponenciális növekedés, csökkenés. Logaritmus.

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Nevezetes egyenlőtlenségek, szélsőérték-feladatok elemi megoldása	Órakeret 14 óra
Előzetes tudás	Nevezetes azonosságok ismerete. Középek és sorrendjük ismerete két változóra. Másodfokú és trigonometrikus függvények ismerete.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Gyakorlati problémák matematikai modelljének felállítása. A modell hatókörének vizsgálata, a kapott eredmény összevetése a valósággal. A szélsőérték-problémához illő megoldási mód kiválasztása. Gyakorlat optimális megoldások keresésében.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>Azonos egyenlőtlenségek. Nevezetes középek közötti egyenlőtlenségek. (Többváltozós alak bizonyítása fokozatos közelítés módszerével.)</p>		

Nevezetes közepek közötti egyenlőtlenségek alkalmazása szélsőérték-feladatok megoldásában. Szélsőérték-feladatok megoldása függvénytulajdonságok segítségével. (Másodfokú és trigonometrikus függvényekkel.) Szélsőérték-feladatok megoldása fokozatos közelítés módszerével.	
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Szélsőérték hely, szélsőérték. Nevezetes közép.

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Statisztika, valószínűség	Órakeret 20 óra
Előzetes tudás	Adatok elemzése, átlag, táblázatok, grafikonok használata, gyakoriság, relatív gyakoriság, valószínűség egyszerű fogalma. Százalékszámítás.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Ismeretek rendszerezése. Tapasztalatszerzés újabb kísérletekkel, a kísérletek kiértékelése, következtetések. Diagram készítése, olvasása. Táblázat értelmezése, készítése. Számítógép használata az adatok rendezésében, értékelésében, ábrázolásában. A valószínűség és a relatív gyakoriság fogalmának mélyítése, kapcsolatuk belátása.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>Statisztikai adatok gyűjtése, elemzése és ábrázolása. Adatok rendezése, osztályokba sorolása, táblázatba rendezése, ábrázolása. Adathalmazok jellemzői: terjedelem, átlag, medián, módusz, szórás. Oszlop diagram kör diagram értelmezése, készítése hagyományos és digitális eszközökkel. Kördiagramból oszlopdiagram készítése és viszont. Grafikus manipulációk felismerése és javítása diagramok esetén.</p>		<p><i>Földrajz:</i> időjárási, éghajlati és gazdasági statisztikák.</p> <p><i>Történelem, társadalmi és állampolgári ismeretek:</i> történelmi, társadalmi témák vizuális ábrázolása (táblázat, diagram).</p> <p><i>Informatika:</i> adatkezelés, adatfeldolgozás, információ-megjelenítés.</p>
<p>Véletlen jelenségek megfigyelése. Kocka- és pénzérme-dobások – csoportmunka.</p>		<p><i>Informatika:</i> véletlen jelenségek számítógépes szimulációja.</p>

<p>Valószínűségi kísérlet, esemény, elemi esemény, biztos esemény, lehetetlen esemény, komplementer esemény, gyakoriság, relatív gyakoriság, valószínűség, diszkrét valószínűség-eloszlás. Egyszerűbb események valószínűsége. Klasszikus valószínűségi modell. A valószínűség meghatározása kombinatorikus eszközökkel.</p>	
<p>Kulcsfogalmak/ fogalmak</p>	<p>Terjedelem, átlag, medián, módusz, szórás. Valószínűség.</p>

<p>A fejlesztés várt eredményei a 9. évfolyam végén</p>	<p><i>Gondolkodási és megismerési módszerek</i></p> <ul style="list-style-type: none"> – Halmazműveletek alkalmazása számhalmazokra, ponthalmazokra. – Logikai műveletek és tulajdonságaik ismerete. – Definíció, tétel felismerése, az állítás és megfordításának felismerése; bizonyítás gondolatmenetének követése. – Bizonyítási módszerek ismerete, a logikai szita alkalmazása feladatmegoldás során. – Konstruktív feladatok megoldása, lehetetlenség bizonyítása. <p><i>Számelmélet, algebra</i></p> <ul style="list-style-type: none"> – Racionális és irracionális számok, a valós számok halmazának szemléletes fogalma, véges és végtelen tizedes törtek, számegyenes alkalmazása. – Számok normálalakja, normálalakkal végzett műveletek alkalmazása. – Oszthatóság, a számelmélet alaptétele, alkalmazása. – Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös ismerete, alkalmazása. – Prímekre vonatkozó tételek, sejtések ismerete. – Algebrai kifejezésekkel végzett műveletek, azonosságok alkalmazása. – A gyökvonás fogalmának ismerete, a gyökvonás azonosságainak alkalmazása. – Első- és másodfokú, és másodfokúra visszavezethető egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek, szöveges feladatok megoldása. – A számológép használata. <p><i>Geometria</i></p> <ul style="list-style-type: none"> – Tételek ismerete, távolság és szög fogalma, mérése. – Nevezetes ponthalmazok rendszerezése, alkalmazása. – A kör és részeinek ismerete. – Egybevágósági transzformációk ismerete, alkalmazása szerkesztési és bizonyítási feladatokban, a művészetekben való alkalmazás ismerete. – Egybevágó alakzatok tulajdonságainak ismerete, alkalmazása. – Vektor fogalmának, vektorműveleteknek az ismerete. – Háromszögek, négyszögek, sokszögek szögei, nevezetes vonalainak, köreinek ismerete. Az ismeretek alkalmazása számítási, szerkesztési és bizonyítási feladatokban. – A Pitagorasz-tétel és a Thalész-tétel alkalmazása.
--	---

	<p><i>Függvények, sorozatok</i></p> <ul style="list-style-type: none"> – A függvény fogalmának mélyülése. Új függvényjellemzők ismerete: korlátosság, periodicitás. – A négyzetgyök függvény ábrázolása, jellemzése. – Függvénytranszformációk elvégzése. – Mindennapjainkhoz, más tantárgyakhoz kapcsolódó folyamatok elemzése a megfelelő függvény grafikonja alapján
--	---

<p>A fejlesztés várt eredményei a 10. évfolyam végén</p>	<p><i>Gondolkodási és megismerési módszerek</i></p> <ul style="list-style-type: none"> – Logikai műveletek és tulajdonságaik ismerete. – Definíció, tétel felismerése, az állítás és megfordításának felismerése; bizonyítás gondolatmenetének követése. – Bizonyítási módszerek ismerete, a skatulyaelv alkalmazása feladatmegoldás során. – Konstruktív feladatok megoldása, lehetetlenség bizonyítása. – Gráfok használata gondolatmenet szemléltetésére. <p><i>Számelmélet, algebra</i></p> <ul style="list-style-type: none"> – A gyökvonás azonosságainak alkalmazása, gyökös egyenletek megoldása. – Másodfokú függvényekre vezető szélsőérték-problémák megoldása. – Nevezetes közepek alkalmazása szélsőérték-problémák megoldásában. – A számológép használata. <p><i>Geometria</i></p> <ul style="list-style-type: none"> – Körrel kapcsolatos tételek alkalmazása (kerületi és középponti szögek tétele, húrnégyszögek és érintőnéyszögek tételei). – Hasonlósági transzformációk ismerete, alkalmazása szerkesztési és bizonyítási feladatokban, a művészetekben való alkalmazás ismerete. – Hasonló alakzatok tulajdonságainak ismerete, alkalmazása. – Vektorfelbontás, vektorkoordináták meghatározása adott bázisrendszerben. – Hegyesszögek szögfüggvényeinek értelmezése, számolás szögfüggvényekkel. Szögfüggvények közötti összefüggések ismerete, alkalmazása. – Trigonometrikus függvények grafikonja, tulajdonságai. – Trigonometrikus egyenletek megoldása, az azonosságok alkalmazása, az összes gyök megtalálása. <p><i>Függvények, sorozatok</i></p> <ul style="list-style-type: none"> – A függvény fogalmának mélyülése. Új függvényjellemzők ismerete: korlátosság, periodicitás. – Függvénytranszformációk elvégzése. – Mindennapjainkhoz, más tantárgyakhoz kapcsolódó folyamatok elemzése a megfelelő függvény grafikonja alapján. <p><i>Hatvány, gyök, logaritmus:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> – A kiterjesztett gyök-, és hatványfogalom ismerete. – A logaritmus fogalmának ismerete. – A gyök, a hatvány és a logaritmus azonosságainak alkalmazása
---	--

	<p>konkrét esetekben, probléma megoldása céljából.</p> <ul style="list-style-type: none"> – Exponenciális és logaritmusos egyenletek megoldása, ellenőrzése. <p><i>Nevezetes egyenlőtlenségek, szélsőérték-feladatok:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> – A nevezetes közepek közötti összefüggések ismerete – Alkalmazásuk szélsőértékek meghatározásakor. <p><i>Valószínűség, statisztika</i></p> <ul style="list-style-type: none"> – Statisztikai adatok elemzése: adat gyakoriságának és relatív gyakoriságának kiszámítása. – Táblázat olvasása és készítése; diagramok olvasása és készítése; adathalmaz móduszának, mediánjának, átlagának meghatározása. – Véletlen esemény, biztos esemény, lehetetlen esemény, véletlen kísérlet, esély/valószínűség fogalmak ismerete, használata. A műveletek elvégzése az eseménytérben. – A valószínűség klasszikus modelljének alkalmazása.
--	---

11–12. évfolyam

Ez a szakasz az eddigi matematikatanulás szintézisét adja, és egyben kiteljesíti a kapcsolatokat a többi tantárggyal, valamint a mindennapi élet matematikaigényes elemeivel. A matematikatanulásban kialakult rendszeresség, problémamegoldó készség az élet legkülönbözőbb területein segíthet. Ezt célszerű tudatosítani a tanulóknál.

Ez a kerettantervi elem a matematika főiskolai-egyetemi tanulására való felkészítést célozza meg. A problémamegoldó készségen túl fontos az önálló rendszerezés, lényegkiemelés, történeti áttekintés készségének kialakítása, az alkalmazási lehetőségek megtalálása, a kapcsolatok keresése különböző témakörök között.

Ebben az időszakban áttekintését adjuk a korábbi évek ismereteinek, eljárásainak, problémamegoldó módszereinek, miközben sok, gyakorlati területen széles körben használható tudást is közvetítünk, amelyek kissé összetettebb problémák megoldását is lehetővé teszik. Az érettségi előtt már elvárható a tanulóktól többféle készség és ismeret együttes alkalmazása. Minden témában hangsúlyosan kell kitérnünk a gyakorlati alkalmazásokra, az ismeretek más tantárgyakban való felhasználhatóságára.

Ebben a szakaszban is fontos cél, hogy az ismeretszerzési folyamat során a tanuló a tanár által irányított módon, a feladatok megoldása mentén maga fedezze fel az összefüggéseket, általánosítási lehetőségeket, megoldási módokat. A kooperatív munkaformák, a csoportmunkában megoldandó projektfeladatok ebben a szakaszban is fejlesztik a matematikai kommunikációt. Az érettségi vizsgára készüléskor egyre nagyobb hangsúlyt kap a tanulók önálló munkája mind a feladatmegoldásokban, mind a tanultak ismétlésében, rendszerezésében. A digitális eszközök, dinamikus szoftverek, online felületek támogatják a szemléltetést, a megértést, a felfedeztetést és a gyakorlást.

A sorozatok, kamatos kamat témakör kiválóan alkalmas a pénzügyi, gazdasági problémákban való jártasság kialakítására. A korábbiaknál is nagyobb hangsúlyt kell fektetni a különböző gyakorlati problémák optimumát kereső feladatokra. Ezért az ilyen problémák elemi megoldását külön fejezetként iktatjuk be.

Az analízis témakörben a szemléletesség segíti a problémák átlátását, az egzaktság pedig a felsőfokú képzésre való készülést.

A rendszerező összefoglalás, túl azon, hogy az eddigi matematikatanulás szintézisét adja, mintaként szolgálhat a későbbiekben is bármely területen végzett összegző munkához.

Az egyes tematikus egységekre javasolt óraszámokat a táblázatok tartalmazzák. Ezen kívül további ismétlésre 10-10 óra használható fel.

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Gondolkodási módszerek, halmazok, matematikai logika, kombinatorika, gráfok	Órakeret 45 óra
Előzetes tudás	Matematikai állítások elemzése, igaz és hamis állítások. Logikai műveletek: NEM, ÉS, VAGY. Skatulya elv, logikai szita. Sorbarendezési és kiválasztási feladatok, gráfhasználat feladatmegoldásban. Gráf, csúcs, él, fokszám.	

A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Korábban megismert fogalmak ismételése, elmélyítése. Kombinatorikai és gráfelméleti módszerek alkalmazása a matematika különböző területein, felfedezésük a hétköznapi problémákban.
Ismeretek/fejlesztési követelmények	Kapcsolódási pontok
<p>Számhalmazok. Számhalmazok bővítésének szükségessége a természetes számoktól a komplex számokig. Algebrai számok, transzcendens számok. Komplex számok és ábrázolásuk. Műveletek komplex számokkal: összeadás, szorzás, hatványozás, gyökvonás. Trigonometrikus alak, Moivre tétele. Egységgyökök. A harmadfokú egyenlet megoldása, Cardano-képlet. A komplex számok alkalmazásai.</p> <p>Halmazok számossága. Halmazok ekvivalenciája. Végtelen és véges halmazok. Megszámlálható és nem megszámlálható halmazok. Kontinuum-sejtés.</p> <p>A halmazműveletek és logikai műveletek közötti kapcsolatok bemutatása példákon keresztül. Stratégiai és logikai játékok.</p>	<p><i>Filozófia:</i> Gondolati rendszerek felépítése. Bizonyíthatóság.</p>
<p>Konstrukciók. Lehetetlenségi bizonyítások. Adott tulajdonságú matematikai objektumok konstruálása. Adott tulajdonságú sorozatok, függvények, egyenletek, műveletek, ábrák, lefedések, színezések stb. Annak indoklása, hogy valamely konstrukció nem hozható létre. (Pl. invariáns mennyiség keresésével.) Példák a matematika történetéből lehetetlenségi bizonyításokra.</p>	
<p>Kombinatorika. (A korábbi ismeretek összegzése.) Permutáció – ismétlés nélkül és ismétléssel. Variáció – ismétlés nélkül és ismétléssel. Kombináció – ismétlés nélkül és ismétléssel. Mintavétel visszatevéssel és visszatevés nélkül. (Vegyes kombinatorikai feladatokon keresztül ismétlés, rendszerezés.) Binomiális együtthatók, tulajdonságaik. Pascal-háromszög és tulajdonságai. Binomiális tétel Néhány kombinatorikus geometriai probléma.</p>	
<p>Gráfok. Gráfelméleti alapfogalmak: csúcs, él, fokszám, egyszerű gráf, összefüggő gráf, komplementer gráf, fagráf, kör, teljes gráf). Gráfokra, éleikre, csúcsok fokszámaira vonatkozó egyszerű tételek. Gráfok alkalmazása leszámolásos feladatokban – rendszerező ismétlés.</p>	<p><i>Biológia-egészségtan:</i> genetika.</p>

<i>Matematikatörténet: Euler.</i>		
A matematika felépítése. Fogalmak, alapfogalmak, axiómák, tételek, sejtések. Műveletek a matematikában. Műveleti tulajdonságok. Relációk a matematikában és a mindennapi életben. Relációtulajdonságok. Bizonyítási módszerek áttekintése. Direkt, indirekt bizonyítás, logikai szita formula, skatulya elv, teljes indukció. Tételek megfordítása.		<i>Filozófia:</i> Gondolati rendszerek felépítése. Állítások igazolásának szükségessége.
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Permutáció, variáció, kombináció, művelet, reláció, binomiális együttható.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Trigonometria	Órakeret 20 óra
Előzetes tudás	Vektorokkal végzett műveletek. Hegyesszögek szögfüggvényei, a szögfüggvények általános értelmezése, szögmérés fokban és radiánban, szögfüggvények közötti egyszerű összefüggések, trigonometrikus függvények.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A geometriai látásmód fejlesztése. A művelet fogalmának bővítése egy újszerű művelettel, a skaláris szorzással. Algebrai és geometriai módszerek közös alkalmazása számítási, bizonyítási feladatokban. A tanultak felfedezése más tudományterületeken is.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
A vektorokról tanultak rendszerező ismétlése: <ul style="list-style-type: none"> - a vektor fogalma, - vektorműveletek, - vektorfelbontás. A vektorok koordinátaival végzett műveletek és tulajdonságaik. A vektor 90° -os elforgatottjának koordinátái.		
Két vektor skaláris szorzata. A skaláris szorzat tulajdonságai. A skaláris szorzás alkalmazása számítási és bizonyítási feladatokban. Merőleges vektorok skaláris szorzata. Szükséges és elégséges feltétel. Két vektor skaláris szorzatának kifejezése a vektorkoordináták segítségével. Vektorok vektoriális szorzata. Szemléletes kép, bizonyítások nélkül.		<i>Fizika:</i> munka, elektromosság.
A háromszög területének kifejezése két oldal és a közbezárt szög segítségével. A háromszög egy oldalának kifejezése a köré írt kör sugara és		<i>Technika, életvitel és gyakorlat:</i> alakzatok adatainak

<p>szemközti szög segítségével. Szinusztétel, a tétel bizonyítása. Koszinusztétel. A tételek pontos kimondása, bizonyítása. Kapcsolat a Pitagorasz-tétellel. Általános háromszög adatainak meghatározása. Egyértelműség vizsgálata. Számítások négyszögekben, sokszögekben szögfüggvények segítségével. Szög, távolság, terület meghatározása gyakorlati problémákban is. Bizonyítási feladatok.</p>	<p>meghatározása. <i>Földrajz:</i> távolságok, szögek kiszámítása – terepmérési feladatok. GPS-helymeghatározás.</p>
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Skaláris szorzat, szinusztétel. Koszinusztétel.

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Koordinátageometria	Órakeret 40 óra
Előzetes tudás	Koordinátarendszer, vektorok, vektorműveletek megadása koordinátákkal. Ponthalmazok koordináta-rendszerben. Függvények ábrázolása. Elsőfokú, másodfokú egyenletek, egyenletrendszerek megoldása.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Elemi geometriai ismeretek megközelítése új eszközzel. Geometriai problémák megoldása algebrai eszközökkel. Számítógép használata.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>A Descartes-féle koordinátarendszer. A helyvektor és a szabadvektor. Rendszerező ismétlés.</p>		<i>Informatika:</i> számítógépes program használata.
<p>Vektor abszolútértékének kiszámítása. Két pont távolságának kiszámítása. A Pitagorasz-tétel alkalmazása. Két vektor hajlásszöge. Skaláris szorzat használata.</p>		
<p>Szakasz osztópontjának koordinátái. A háromszög súlypontjának koordinátái. Elemi geometriai ismereteket alkalmazása, vektorok használata, koordináták számolása.</p>		<i>Fizika:</i> alakzatok tömegközéppontja.
<p>Az egyenes helyzetét jellemző adatok: irányvektor, normálvektor, irányszög, iránytangens. A különböző jellemzők közötti kapcsolat értése, használata. Az egyenes egyenletei.</p> <ul style="list-style-type: none"> – Adott pontra illeszkedő, adott normálvektorú egyenes, illetve sík egyenlete. – Adott pontra illeszkedő, adott irányvektorú egyenes egyenlete síkban, egyenletrendszere térben. 		<p><i>Fizika:</i> mérések értékelése. <i>Informatika:</i> számítógépes program használata.</p>

<p>– Iránytényezős egyenlet. Geometriai feladatok megoldása algebrai eszközökkel. Kétismeretlenes lineáris egyenlet és az egyenes egyenletének kapcsolata. A feladathoz alkalmas egyenlettípus kiválasztása. Két egyenes párhuzamosságának és merőlegességének a feltétele. Két egyenes metszéspontja. Két egyenes szöge. Skaláris szorzat használata.</p>	
<p>A kör egyenlete. Kétismeretlenes másodfokú egyenlet és a kör egyenletének kapcsolata. Kör és egyenes kölcsönös helyzete. A kör érintőjének egyenlete. Két kör közös pontjainak meghatározása. Másodfokú, kétismeretlenes egyenletrendszer megoldása. A diszkrimináns vizsgálata, diszkusszió. Szerkeszthetőségi kérdések.</p>	<p><i>Informatika:</i> számítógépes program használata.</p>
<p>A parabola tengelyponti egyenlete. A parabola pontjainak tulajdonsága: fókuszpont, vezéregyenes. A parabola és a másodfokú függvény. Teljes négyzetté kiegészítés. A parabola és az egyenes kölcsönös helyzete. A diszkrimináns vizsgálata, diszkusszió.</p>	<p><i>Fizika:</i> geometriai optika, fényszóró, visszapiillantó tükör.</p>
<p>Összetett feladatok megoldása paraméter segítségével vagy a szerkesztés menetének követésével. Ponthalmazok a koordinátasíkon. Egyenlőtlenséggel megadott egyszerű feltételek.</p>	<p><i>Informatika:</i> több feltétel együttes vizsgálata.</p>
<p>Kulcsfogalmak/ fogalmak</p>	<p>Vektor, irányvektor, normálvektor, iránytényező. Egyenes, kör, parabola egyenlete.</p>

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Sorozatok	Órakeret 35 óra
Előzetes tudás	Számtani sorozat, mértani sorozat fogalma, egyszerű alapösszefüggések.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A hétköznapi életben, matematikai problémában a sorozattal leírható mennyiségek észrevétele. Sorozatok megadási módszereinek alkalmazása. Összefüggések, képletek hatékony alkalmazása.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>A sorozat fogalma, megadása, ábrázolása. Korábbi ismeretek rendszerező ismételése. Sorozat megadása rekurzióval – Fibonacci-sorozat. Rekurzív sorozat n-edik elemének megadása. <i>Matematikatörténet:</i> Fibonacci.</p>		<p><i>Informatika:</i> algoritmusok.</p>
Számtani sorozat.		<i>Fizika;</i> <i>kémia;</i>

<p>A számtani sorozat n-edik tagja. A számtani sorozat első n tagjának összege. Mértani sorozat. A mértani sorozat n-edik tagja. A mértani sorozat első n tagjának összege. Számítási feladatok számtani és a mértani sorozatokra. Szöveges feladatok gyakorlati alkalmazásokkal. Gyakorlati alkalmazások – kamatos kamat számítása. Törlesztési feladatok. Pénzügyi alapfogalmak – kamatos kamat, törlesztőrészlet, hitel, THM, gyűjtőjáradék. Véges sorok összegzése. Számítási és mértani sorozatból előállított szorzatok összegzése. Exponenciális folyamatok vizsgálata Exponenciális folyamatok a természetben és a társadalomban. Exponenciális egyenletre, egyenlőtlenségre vezető matematikai vagy hétköznapi problémák. Adott problémához megoldási stratégia választása. A gyakorlati (például pénzügyi, biológiai, fizikai, demográfiai) problémának megfelelő matematikai modell választása, alkotása. A kiválasztott modellben a probléma megoldása. A modellben kapott megoldás értelmezése az eredeti probléma szövegébe visszahelyettesítve, ellenőrzés és válaszadás az ésszerűségi szempontokat figyelembe véve.</p> <p><i>Matematikatörténet: Fibonacci.</i></p>	<p><i>biológia-egészségtan; földrajz; történelem, társadalmi és állampolgári ismeretek: lineáris és exponenciális folyamatok.</i></p> <p><i>Technika, életvitel és gyakorlat: hitel – adósság – eladósodás.</i></p>
<p>Sorozatok konvergenciája. A határérték szemléletes és pontos definíciói. Műveletek konvergens sorozatokkal. Konvergens és divergens sorozatok. Az $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{n}$ $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozatok. Konvergens sorozatok tulajdonságai. Torlódási pont. Konvergens sorozatnak egy határértéke van. Minden konvergens sorozat korlátos. Monoton és korlátos sorozat konvergens. Konvergens sorozatokra vonatkozó egyenlőtlenségek. Rendőrelv.</p>	
<p>Végtelen sorok. Végtelenség sor konvergenciája, összege. Végtelen mértani sor. Szakaszos végtelen tizedes tört átváltása. További példák konvergens sorokra.</p>	
<p>Kulcsfogalmak/ fogalmak</p>	<p>Sorozat, számtani sorozat, mértani sorozat, kamatos kamat, rekurzív sorozat.</p>

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Folytonosság, differenciálszámítás	Órakeret 35 óra
Előzetes tudás	Függvények megadása, értelmezési tartomány, értékkészlet. Függvények jellemzése: zérushely, korlátosság, szélsőérték, monotonitás, paritás, periodicitás. Sorozatok határértéke.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Megismerkedés a függvények vizsgálatának új módszerével. A függvény folytonossága és határértéke fogalmának megalapozása. A differenciálszámítás módszereinek használata a függvények lokális és globális tulajdonságainak vizsgálatára. A matematikán kívüli területeken – fizika, közgazdaságtan – is alkalmazások keresése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
A valós számok halmazán értelmezett függvények jellemzése. Korábbi ismeretek rendszerező ismételése.		<i>Informatika:</i> számítógépes szoftver alkalmazása függvények grafikonjának megrajzolására.
Függvény határértéke. A függvények határértékének szemléletes fogalma, pontos definíciói. Jelölések. Függvények véges helyen vett véges; véges helyen vett végtelen; végtelenben vett véges; végtelenben vett végtelen határértéke. A sorozatok és a függvények határértékének kapcsolata. A $\frac{\sin x}{x}$ függvény vizsgálata, az $x = 0$ helyen vett határértéke.		<i>Informatika:</i> a határérték számítógépes becslése. <i>Fizika:</i> felhasználás $\sin x$, illetve $\operatorname{tg} x$ közelítésére kis szög esetében.
A függvények folytonossága. Példák folytonos és nem folytonos függvényekre. A folytonosság definíciói. Intervallumon folytonos függvények. Korlátos és zárt intervallumon folytonos függvények tulajdonságai. (Bizonyítások nélkül, de ellenpéldákkal azokra az esetekre, ha az intervallum nem korlátos, nem zárt, illetve ha a függvény nem folytonos.)		<i>Fizika:</i> példák folytonos és diszkrét mennyiségekre.
Bevezető feladatok a differenciálhányados fogalmának előkészítésére. A függvénygörbe érintőjének iránytangense. A pillanatnyi sebesség meghatározása.		<i>Fizika:</i> az út-idő függvény és a pillanatnyi sebesség kapcsolata. A fluxus és az indukált feszültség kapcsolata. <i>Biológia-egészségtan:</i> populáció

	növekedésének átlagos sebessége.
<p>A differenciálhatóság fogalma. A különbségi hányados függvény, a differenciálhányados (derivált), a deriváltfüggvény. Példák nem differenciálható függvényekre is. Kapcsolat a differenciálható és a folytonos függvények között. Alapfüggvények deriváltja: Konstans függvény, x^n, trigonometrikus függvények deriváltja. Műveletek differenciálható függvényekkel. Függvény konstansszorosának deriváltja, összeg-, szorzat-, hányados-, összetett függvény deriváltja. Inverz függvény deriváltja. Exponenciális és logaritmusfüggvény deriváltja. (Bizonyítás nélkül.) Magasabbrendű deriváltak. <i>Matematikatörténet: Fermat, Leibniz, Newton, Cauchy, Weierstrass.</i></p>	<p><i>Fizika:</i> harmonikus rezgőmozgás kitérése, sebessége, gyorsulása – ezek kapcsolata.</p>
<p>A függvény tulajdonságai és a derivált kapcsolata. – Lokális növekedés, fogyás – intervallumon monoton függvény. – Szélsőérték – lokális szélsőérték, abszolút szélsőérték. A szükséges és az elégséges feltételek pontos megfogalmazása, alkalmazása.</p>	<p><i>Fizika:</i> fizikai tartalmú függvények (pl. út-idő, sebesség-idő) deriváltjainak jelentése.</p>
<p>Konvexitás vizsgálata deriválással. A konvexitás definíciója. Inflexió pont. A második derivált és a konvexitás kapcsolata.</p>	
<p>Függvényvizsgálat differenciálszámítással. Összevetés az elemi módszerekkel.</p>	
<p>Gyakorlati jellegű szélsőérték-feladatok megoldása. A differenciálszámítás és az elemi módszerek összevetése.</p>	<p><i>Fizika:</i> Fermat-elv, Snellius-Descartes törvény. Fizikai jellegű szélsőérték-problémák.</p>
<p>Kulcsfogalmak/ fogalmak</p>	<p>Függvényfolytonosság, -határérték. Különbségi hányados függvény, derivált, deriváltfüggvény, magasabbrendű derivált. Monotonitás, lokális szélsőérték, abszolút szélsőérték. Konvex, konkáv függvény.</p>

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Statisztika, valószínűség	Órakeret 31 óra
Előzetes tudás	Adatok elemzése, táblázatok, grafikonok használata. Terjedelem, átlag, medián, módusz, szórás. Klasszikus valószínűségi modell.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A valószínűség fogalmának bővítése, mélyítése. A kombinatorikai ismeretek alkalmazása valószínűség meghatározására. Mit jelent a valószínűség – a nagy számok törvénye.	

Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>Statisztikai mintavétel. Mintavétel visszatevéssel, visszatevés nélkül.</p> <p>Számsokaságok jellemzése: átlag, medián, módusz, szórás, kvartilisek. Gyakorlati példák arra, hogy mikor melyik mutatóval célszerű jellemezni a számsokaságot. Átlagos abszolút eltérés, átlagos négyzetes eltérés. A medián és az átlag minimumtulajdonsága. Sodrófa (box-plot) diagram készítése, alkalmazása. Nagy adathalmazok kezelése táblázatkezelő programmal. Grafikus és szöveges statisztikai manipulációk felismerése.</p>		<p><i>Informatika:</i> táblázatkezelő, adatbázis-kezelő program használata.</p> <p><i>Történelem, társadalmi és állampolgári ismeretek:</i> választások.</p>
<p>Eseményalgebra. Kapcsolat a halmazok és a logika műveleteivel. <i>Matematikatörténet:</i> George Boole.</p>		
<p>Véletlen jelenségek megfigyelése. A modell és a valóság kapcsolata. Szerencsejátékok elemzése. Klasszikus valószínűségi modell. Események összegének, szorzatának, komplementerének valószínűsége. Kizáró események, független események valószínűsége. Feltételes valószínűség. A teljes valószínűség tétele, Bayes-tétel. Mintavételre vonatkozó valószínűségek megoldása klasszikus modell alapján. Geometriai valószínűség fogalmának ismerete és alkalmazása. Binomiális eloszlás, hipergeometriai eloszlás: várható érték, szórás. A várható érték ismerete és meghatározása konkrét feladatokban, játékokban. Nagy számok törvénye. (Szemléletes tárgyalás képletek nélkül.) Pénzügyi fogalmakkal kapcsolatos valószínűségi ismeretek (például biztosítás befektetések kockázata, árfolyamkockázat).</p>		<p><i>Informatika:</i> véletlen jelenségek számítógépes szimulációja.</p>
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Valószínűség, kizáró esemény, független esemény.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Integrálszámítás, téreometria	Órakeret 60 óra
Előzetes tudás	Folytonos függvények fogalma. Területszámítás elemei. Sorozatok, véges sorok. Differenciálási szabályok ismerete.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Az integrálszámítás módszereivel találkozva a közelítő módszerek ismeretének bővítése. A függvény alatti terület alkalmazásai a matematika és a fizika több területén. Áttekintő képet kialakítása a téreometriáról, a felszín- és térfogatszámítás módszereiről.	

Ismeretek/fejlesztési követelmények	Kapcsolódási pontok
<p>A területszámítás alapelvei. Néhány egyszerűbb alakzat területének levezetése az alapelvekből.</p> <p>A területszámítás módszereinek áttekintése. Területszámítási módszerek alkalmazása a matematika más témaköreiben. (Pl. geometriai bizonyításokban.)</p>	
<p>A térfogatszámítás alapelvei. Néhány egyszerűbb test térfogatának levezetése az alapelvekből.</p> <p>A térfogatszámítás áttekintése. A térfogatszámítás néhány új eleme. Cavalieri-elv, a gúla térfogata. Csonkagúla térfogata. Érintőpoliéderek térfogata.</p> <p>Alakzatok felszíne, hálójá. Csonkakúp felszíne. Gömb felszínének levezetése (Heurisztikus, nem precíz módszerrel.)</p>	
<p>Térgeometria elemei. Tetraéderekre vonatkozó tételek. (Van-e beírt, körülírt gömbje, súlypontja, magasságpontja?) Tetraéder és paralelepipedon. Euler-féle poliéder-tétel. (Bizonyítás nélkül.) Szabályos testek.</p>	<p><i>Kémia:</i> kristályok.</p> <p><i>Művészetek:</i> szimmetriák.</p>
<p>Bevezető feladatok az integrál fogalmához. Függvény grafikonja alatti terület. A megtett út és a sebesség-idő grafikon alatti terület. A munka kiszámítása az erő-út grafikon alatti terület alapján.</p>	
<p>Alsó és felső közelítő összegek. Az intervallum felosztása, a felosztás finomítása. Közelítés véges összegekkel.</p> <p>A határozott integrál fogalma, jelölése. A szemléletes megközelítésre alapozva eljutás a pontos definícióig. Példa nem integrálható függvényre is. Negatív függvény határozott integrálja. A határozott integrál és a terület-előjeles terület. Az integrál közelítő kiszámítása. Számítógépes szoftver használata a határozott integrál szemléltetésére.</p> <p><i>Matematikatörténet:</i> Bernhard Riemann.</p>	<p><i>Informatika:</i> számítógépes szoftver használata.</p>
<p>Az integrálhatóság szükséges és elegendő feltétele. Korlátos és monoton függvények integrálhatósága. A határozott integrál tulajdonságai.</p>	<p><i>Fizika:</i> A munka és a mozgási energia. Elektromos feszültség két pont között, a potenciál. Tehetetlenségi</p>

	nyomaték. Alakzat tömegközéppontja. A hidrosztatikai nyomás és az edény oldalfalára ható erő. Effektív áramerősség.
<p>Az integrál mint a felső határ függvénye. Integrálfüggvény. Folytonos függvény integrálfüggvényének deriváltja. Kapcsolat a differenciálszámítás és az integrálszámítás között.</p> <p>A primitív függvény fogalma. A primitív függvények halmaza – a határozatlan integrál:</p> <ul style="list-style-type: none"> – hatványfüggvény, polinomfüggvény, – trigonometrikus függvények, – exponenciális függvény, logaritmusfüggvény. <p>A Newton-Leibniz-tétel. Integrálási módszerek: Integrálás helyettesítéssel. Parciális törtekre bontás módszere. Parciális integrálás. $f'(x) \cdot f^n(x)$, $f'(x)/f(x)$ alakú integrandusok.</p> <p><i>Matematikatörténet:</i> Newton, Leibniz, Euler.</p>	
<p>Az integrálszámítás alkalmazása matematikai és fizikai problémákra. Két függvénygörbe közötti terület meghatározása. Forgástest térfogatának meghatározása. Henger, kúp, csonkakúp, gömb, gömbszelet térfogata. Az integrálás közelítő módszerei – numerikus módszerek.</p>	<p><i>Fizika:</i> Potenciál, munkavégzés elektromos, illetve gravitációs erőterben. Váltakozó áram munkája, effektív áram és feszültség. Newton munkássága.</p>
<p>Kulcsfogalmak/ fogalmak</p>	<p>Alsó- és felső közelítő összeg, határozott integrál. Primitív függvény, határozatlan integrál. Newton-Leibniz-tétel. Felszín, térfogat, forgástestek, csonkakúp, gömb.</p>

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Rendszerező összefoglalás	Órakeret 154 óra
Előzetes tudás	A 4 év matematika-tananyaga.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Ismeretek rendszerezése, alkalmazása az egyes témakörökben. Felkészítés az emelt szintű érettségire: az önálló rendszerzés, lényegkiemelés, történeti áttekintés készségének kialakítása, alkalmazási lehetőségek megtalálása. Kapcsolatok keresése különböző témakörök között. Elemzőkészség, kreativitás fejlesztése. Felkészítés a felsőfokú oktatásra.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok

<p><i>Gondolkodási módszerek</i></p> <p><i>Halmazok, matematikai logika</i> Halmazok, megadási módjaik, részhalmaz, kiegészítő halmaz. Halmazok közötti műveletek. Végtelen halmazok elmélete; számosságok. Állítások, logikai értékük. Negáció, konjunkció, diszjunkció, implikáció, ekvivalencia. Univerzális és egzisztenciális kvantor.</p> <p><i>Kombinatorika, gráfok, algoritmusok</i> Permutáció, variáció, kombináció. Binomiális tétel. Pascal háromszög. Elemi gráfelméleti ismeretek. Euler-féle poliédertétel. A bizonyítások fejlődése és a bizonyítási módszerek változása. Nevezetes sejtések.</p>	<p><i>Filozófia:</i> gondolati rendszerek felépítése, fejlődése.</p>
<p><i>Algebra és számelmélet</i></p> <p><i>Műveletek kifejezésekkel</i> Algebrai kifejezések átalakításai, nevezetes szorzatok. A hatványozás azonosságai. Matematikai fogalmak fejlődése, permanencia-elv. Gyökös kifejezések átalakításai. Exponenciális és logaritmikus kifejezések átalakításai.</p> <p><i>Számelmélet</i> Oszthatósági szabályok. Számolás maradékokkal. Primszámok. Oszthatósági feladatok megoldása.</p> <p><i>Egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek</i> Lineáris és lineárisra visszavezethető egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek. Másodfokú és másodfokúra visszavezethető egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek. Gyökös egyenletek, egyenlőtlenségek. Exponenciális és logaritmikus egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek. Trigonometrikus egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek. Polinomok algebrája. Paraméteres egyenletek, egyenlőtlenségek.</p>	<p><i>Fizika;</i> számítási megoldása. <i>kémia:</i> feladatok</p>
<p><i>Geometria</i></p> <p><i>Geometriai alapfogalmak</i> Tételek köcsönös helyzete, távolsága, szöge.</p> <p><i>Geometriai alakzatok, bizonyítások</i> Nevezetes ponthalmazok. Síkdomok, testek, tulajdonságaik. Elemi sík- és térgeometriai tételek.</p> <p><i>Geometriai transzformációk</i> Egybevágósági és hasonlósági transzformációk, tulajdonságaik. Szerepük a bizonyításokban és a szerkesztésekben.</p> <p><i>Vektorok, trigonometria, koordináta-geometria</i></p>	<p><i>Művészetek:</i> szimmetriák, aranymetszés.</p> <p><i>Informatika:</i> számítógépes geometriai programok használata.</p>

<p>Vektor fogalma, műveletek a vektorok körében. Matematikai fogalmak fejlődésének követése. Vektorfelbontás, vektorok koordinátái. Hegyszög szögfüggvényei. Szinusz- és koszinusztétel. A háromszög hiányzó adatainak kiszámolása. Trigonometrikus azonosságok. Az egyenes egyenletei, egyenletrendszere (síkban és térben). A kör egyenletei. A kúpszeletek definíciója, egyenleteik.</p> <p><i>Geometriai mértékek</i> A hosszúság és a szög mértékei. Kiszámolási módjaik. A kétoldali közelítés módszere. A terület fogalma és kiszámítási módjai. A felszín és térfogat fogalma és kiszámítási módjai. Az integrálszámítás felhasználása alakzatok mértékének kiszámításához.</p>	
<p><i>Függvények, sorozatok, az analízis elemei</i> <i>Függvények</i> A függvény fogalma. Függvények rendszerezése a definiáló kifejezés szerint: konstans, lineáris, egészrész, törtrész, másodfokú, abszolútérték, exponenciális, logaritmus, trigonometrikus függvények. Függvények rendszerezése tulajdonságaik szerint. Függvénytranszformációk. Valós folyamatok elemzése függvénytani modellek szerint.</p> <p><i>Sorozatok, sorok</i> A sorozat fogalma. Számítási, mértani sorozat. Rekurzióval megadott egyéb sorozatok. Sorozatok monotonitása, konvergenciája. A végtelen mértani sor.</p> <p><i>Analízis</i> Függvények korlátossága és monotonitása. Függvény határértéke, folytonossága. Differenciálhányados, derivált függvény. Differenciálási szabályok. Függvényvizsgálat differenciálás segítségével. Szélsőérték-meghatározási módok. A tanult függvények primitív függvényei. Integrálási módszerek. A határozott integrál. Newton–Leibniz-tétel. A határozott integrál alkalmazásai.</p>	<p><i>Informatika:</i> számítógépes programok használata függvények ábrázolására, vizsgálatára.</p> <p><i>Fizika:</i> Az analízis alkalmazásai a fizikában. A matematika és a fizika kölcsönhatása az analízis módszereinek kialakulásában.</p>
<p><i>Valószínűségszámítás, statisztika</i> Statisztikai alapfogalmak: módus, medián, átlag, szórás. Eseményalgebra és műveleti tulajdonságai. Teljes eseményrendszer. A matematika különböző területeinek összekapcsolása:</p>	<p><i>Informatika:</i> táblázatkezelő, adatbázis-kezelő program használata.</p>

<p>Boole-algebra. Grafikonok, táblázatok, diagrammok készítése és olvasása. Valószínűségi kísérletek, gyakoriság, relatív gyakoriság. A valószínűség kiszámítási módjai. Feltételes valószínűség. Mintavételi feladatok klasszikus modell alapján. Szerepük a mindennapi életben. A véletlen szabályszerűségei, a nagy számok törvénye. A közvéleménykutatás elemei.</p>	<p><i>Fizika:</i> fizikai jelenségek valószínűség-számítási modellje.</p>
<p><i>Motivációs témakörök</i> Néhány matematikatörténeti szemelvény. A matematikatörténet néhány érdekes problémájának áttekintése. (Pl. Rényi Alfréd: Dialógusok a matematikáról.) Matematikusokkal kapcsolatos történetek. Matematika alapú játékok. Logikai feladványok, konstrukciós feladatok. A matematika néhány filozófiai kérdése. A matematika fejlődésének külső és belső hajtóerői. Néhány megoldatlan és megoldhatatlan probléma.</p>	<p><i>Informatika:</i> könyvtárhasználat, internethasználat.</p>

<p>A fejlesztés várt eredményei a 11. évfolyam végén</p>	<p><i>Gondolkodási és megismerési módszerek</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Halmazok számosságával kapcsolatos ismeretek áttekintése. - A kombinatorikai problémák rendszerezése. - Bizonyítási módszerek áttekintése. - A gráfok eszköz jellegű használata probléma megoldásában. <p><i>Geometria</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Vektorok a koordináta-rendszerben, helyvektor, vektorkoordináták. - Két vektor skaláris szorzata, vektoriális szorzata. - Jártasság a háromszögek segítségével megoldható problémák önálló kezelésében, szinusztétel, koszinusztétel alkalmazása. - A geometriai és algebrai ismeretek közötti kapcsolódás elemeinek ismerete: távolság, szög számítása a koordináta-rendszerben, kör, egyenes, parabola egyenlete, geometriai feladatok algebrai megoldása. <p><i>Függvények, az analízis elemei</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - A számtani és a mértani sorozat. Rekurzív sorozatok. - Pénzügyi alapfogalmak ismerete, pénzügyi számítások megértése, reprodukálása, kamatos kamatszámítás elvégzése. - Sorozatok vizsgálata monotonitás, korlátosság, határérték szempontjából. Véges és végtelen sorok összegzése. - A függvények vizsgálata, jellemzése elemi eszközökkel és differenciálszámítás használatával. <p><i>Valószínűség, statisztika</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Statisztikai mutatók használata adathalmaz elemzésében. - A valószínűség matematikai fogalma, klasszikus kiszámítási módja. - Mintavétel és valószínűség kapcsolata, alkalmazása.
---	---

<p>A fejlesztés várt eredményei a 12. évfolyam végén</p>	<p><i>Geometria</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Térbeli viszonyok, testek felismerése, geometriai modell készítése. - Távolság, szög, kerület, terület, felszín és térfogat kiszámítása. - Bizonyítási módszerek ismerete <p><i>Függvények, az analízis elemei.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - A határozott és határozatlan integrál fogalmának ismerete. - Az integrál és a terület kapcsolatának használata. - Integrálási módszerek pontos elvégzése - Az integrálszámítás használata, gyakorlati alkalmazása <p><i>Rendszerező összefoglalás</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Ismeretek rendszerezése, alkalmazása, összekapcsolása a különböző témakörökben. - Számológép pontos használata - A matematika alkalmazása egyéb tudományokban felmerült problémák megoldásánál. - Kreativitás, önálló gondolkodás, önellenőrzés a feladatok megoldása során. - Számítógép, internet alkalmazásának beépítése . - Sikeres felkészítés a kétszintű érettségi vizsgára és a felsőfokú tanulmányokra.
---	---

9-12. emelt matematika tanterv: a tanterv évfolyamokra felosztásának egy lehetősége

9. évfolyam	10. évfolyam
Gondolkodási módszerek, halmazok, matematikai logika, kombinatorika, gráfok Halmazok, ponthalmazok (15 óra) →(a 10. évfolyamon)	Kombinatorika, gráfok (15 óra)
Számelmélet, algebra. Valós számok (20 óra) →(a 10. évfolyamon)	n-edik gyök (5 óra)
Számelmélet, algebra. Algebrai kifejezések használata (25 óra)	
Számelmélet, algebra, Oszthatóság (30 óra)	
Számelmélet, algebra. Egyenlet, egyenlőtlenség, egyenletrendszer (50 óra) →(a 10. évfolyamon)	Gyökös egyenletek (7 óra)
Geometria . Alapfogalmak, ponthalmazok, egybevágósági transzformációk (45 óra) →(a 10. évfolyamon)	Kerületi, középponti szögek,, húrnégyszög (8 óra)
	Geometria . Hasonlóság és kapcsolódó tételek. (42 óra)
Függvények. Algebrai függvények (21 óra)	
	Függvények Hegyesszögek szögfüggvényei, szögfüggvények általánosítása, trigonometrikus függvények, egyenletek (55 óra)
	Hatvány, gyök, logaritmus (40 óra)
	Nevezetes egyenlőtlenségek, szélsőérték-feladatok elemi megoldása (14 pont)
	Statisztika, valószínűség (20 óra)
Ismétlés (10 óra)	Ismétlés (10 óra)
Összesen: 216 óra	Összesen: 216 óra

11. évfolyam	12. évfolyam
Gondolkodási módszerek, halmazok, matematikai logika, kombinatorika, gráfok (45 óra)	Integrálszámítás, térgeometria (60 óra)
Trigonometria (20 óra)	Rendszerező összefoglalás (154 óra)
Koordinátageometria (40 óra)	
Sorozatok (35 óra)	
Folytonosság, differenciálszámítás (35 óra)	
Statisztika, valószínűség (31 óra)	
Ismétlés (10 óra)	Ismétlés (10 óra)
Összesen: 216 óra	Összesen: 224 óra